Aufgabenblatt A3 : Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

Auf dem dritten Arbeitsblatt wenden wir uns nun der Struktur der **Potenz** und ihren **beiden Umkehroperationen** zu. Während **Wurzeln** relativ geläufig sind, stehen **Logarithmen** im Ruf, eher kompliziert zu sein. In der Tat benötigt man dafür auch eine andere Denkweise, die ein fundiertes Verständnis von Potenzen voraussetzt.

Ob Sie die hier geübten Rechenmethoden erfolgreich gelernt haben oder nicht, entscheidet darüber, wie Sie später mit Gleichungen und Formeln umgehen können, in denen Potenzen vorkommen. In der **Technik** sind solche **Formeln/Gleichungen Standard**.
Hinweis: Häufig führen **mehrere Wege** zum Ziel. Probieren Sie unterschiedliche Lösungsideen und vergleichen die Ergebnisse auf Übereinstimmung. Dies wird Ihnen in Zukunft helfen den **schnellsten Weg** intuitiv zu wählen.

Welche Fertigkeiten werden im Einzelnen auf diesem Blatt trainiert?

- Natürliche, negative, rationale Exponenten, Zusammenhang mit Wurzeln
- Potenzgesetze
- Rechnen mit Wurzeln
- Logarithmen und Logarithmengesetze

Aufgabe 1: Einstiegsaufgaben zu Potenzen und Wurzeln

a) Schreiben Sie die Ausdrücke ohne Exponenten:

$5^2 =$ $\quad 2^6 =$ $\quad 3^3 =$ $\quad 8^0 =$

$\left(\frac{1}{2}\right)^3 =$ $\quad \left(\frac{3}{5}\right)^2 =$ $\quad a^2 \cdot a^3 =$ $\quad 4^{-4} \cdot 4^5 =$

b) Schreiben Sie die Ausdrücke ohne gebrochenen/negativen Exponenten:

$3^{-2} =$ $\quad \frac{1}{5^{-2}} =$ $\quad \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} =$ $\quad \left(\frac{2}{7}\right)^{-2} =$

$x^{1/7} =$ $\quad y^{3/2} =$ $\quad a^{-1/4} =$ $\quad c^{-3/8} =$

c) Schreiben Sie die Ausdrücke mit gebrochenen/negativen Exponenten:

$\sqrt{2} =$ $\quad \sqrt[6]{x^5} =$ $\quad \frac{1}{x^6} =$ $\quad \frac{3}{x^4} =$

$\sqrt{\frac{1}{5}} =$ $\quad \sqrt[7]{\frac{1}{x^2}} =$ $\quad \frac{1}{\sqrt{x}} =$ $\quad \frac{4}{\sqrt[3]{x^8}} =$

d) Bestimmen Sie den Wert der Potenzen:

$-2^4 =$ $\quad 2^3 \cdot 4^3 =$ $\quad (-3)^3 =$ $\quad 2^{12} \cdot 2^{-10} =$

$4^{1/2} =$ $\quad 10^{-3} =$ $\quad 125^{-1/3} =$ $\quad 16^{5/4} =$

e) Bestimmen Sie den Wert der Wurzeln:

$\sqrt{25} =$ $\quad \sqrt{64} =$ $\quad \sqrt{1024} =$ $\quad \sqrt{6561} =$

$\sqrt[3]{8} =$ $\quad \sqrt[6]{64} =$ $\quad \sqrt[5]{243} =$ $\quad \sqrt[4]{6561} =$

$\sqrt{x^4} =$ $\quad \sqrt[3]{x^6} =$ $\quad \sqrt{\frac{9}{x^2}} =$ $\quad \sqrt[3]{x^9} =$

Aufgabe 2: Potenzgesetze

Vereinfachen Sie die Terme mittels der Potenzgesetze:

a) $\frac{2^{83}}{2^{79}} =$ $\quad a^{53} \cdot a^{48} =$ $\quad x^7 \cdot y^{-4} \cdot x^3 \cdot y^5 =$

$\frac{5^{10}}{5^7} \cdot 5^{-3} =$ $\quad \frac{1}{3^{-17}} \cdot \frac{1}{3^{13}} =$ $\quad b^3(4a^4b^7 - b^4c^3) =$

$(x^{12})^2 =$ $\quad (k^{24})^{\frac{1}{3}} =$ $\quad ((ab^3)^4)^{-\frac{1}{2}} =$

$\left(\frac{3}{y}\right)^3 =$ $\quad \left(\frac{x}{2}\right)^{12} \cdot \frac{1}{x^6} =$ $\quad \frac{1}{y \cdot z^3} \cdot z^{12} =$

b) $-(-2)^3 \cdot (0{,}5)^3 =$ $\quad ((2^{-2})^3)^{-1} =$

$(a^6 \cdot (2a)^2)^{\frac{1}{2}} =$ $\quad \frac{(2k^2)^3}{4k} =$ $\quad \frac{16}{2^5y^2z^3} \cdot \left(\frac{3y}{z}\right)^2 =$

c) $\frac{15^5 \cdot 20^4}{900^4} =$ $\quad \frac{3^{2^2} \cdot 6^{-4}}{8^{-2}} =$ $\quad \frac{(225)^2}{3^3 \cdot 5^2} =$

d)* $\frac{(4-2x)^5}{(2-x)^3} =$ $\quad \frac{(3ab^2c^3)^6}{27a(b^4c^{-2})^2} =$ $\quad \frac{9}{x^2-y^2} \cdot \left(\frac{3}{x+y}\right)^{-2} =$

Aufgabe 3: Rechnen mit Wurzeln

Vereinfachen Sie die Wurzelausdrücke:

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} =$ $\quad \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} =$ $\quad \sqrt{\sqrt[3]{a^{12}}} =$

$\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}} =$ $\quad \frac{\sqrt{8}}{2} =$ $\quad 4 \cdot \sqrt{\frac{x^2}{32}} =$

$\sqrt{\frac{a^4}{4b^8}} =$ $\quad z^2\sqrt{\frac{z^3}{z^5}} =$ $\quad 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{125}{8}} =$

b) $\sqrt{x^2 + 6x + 9} =$ $\quad \sqrt{x^2 + 36 + 12x} =$ $\quad \sqrt{9x^2 + 25 - 30x} =$

c)* $\sqrt{4a^2 + 8a + 4} =$ $\quad \sqrt{8 + 2x^2 - 8x} =$ $\quad \sqrt{t^2 + 2 + \frac{1}{t^2}}$

$\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a+b}} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{a-b}} =$ $\quad \sqrt{\frac{(x^2-1)}{(x+1)(x-1)^3}} =$ $\quad \frac{\sqrt[4]{x^8(x-5)^8}}{x^2-10x+25} =$

Aufgabe 4: Logarithmen und Logarithmengesetze

a) Berechnen Sie die Logarithmen:

$\log_2 64 =$ $\log_3 \frac{1}{3} =$ $\log_{10} 1000 =$ $\log_4(-16) =$

$\log_2 \sqrt{2} =$ $\log_3 \frac{1}{27} =$ $\log_4 \frac{1}{\sqrt{2}} =$ $\log_3 \frac{1}{\sqrt[4]{27}} =$

$\ln e^3 =$ $\ln e^{2a} =$ $\ln\left(\frac{1}{e^3}\right) =$ $\ln\left(\frac{1}{\sqrt[5]{e^2}}\right) =$

b) Lösen Sie je mindestens 3 Aufgaben aus H1.15 bis H1.17 .

c) Vereinfachen Sie mittels der Logarithmengesetze:

$\log_2 x + \log_2\left(\frac{1}{x^2}\right) =$ $\frac{\log_3 x^2}{2} + \log_3 \frac{1}{x} =$

$\ln(3e^2) - \ln 3 =$ $4 \cdot (\log_{10} 4x + \log_{10} \frac{1}{2\sqrt{x}}) =$

d) Vereinfachen Sie die Terme mit Exponentialfunktion und natürlichen Logarithmus:

$e^{\ln 4} =$ $e^{3\ln 2} =$ $e^{-\ln 7} =$ $e^{1+\ln 6} =$ $\left(\sqrt{e}\right)^{4\ln 2} =$

Lösungen für Blatt 3: (Angaben ohne Gewähr, bei Unklarheit bitte nachfragen)

1.a) $5^2 = 25, 2^6 = 64, 3^3 = 27, 8^0 = 1, \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}, \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$, $a^2 \cdot a^3 = a^5, 4^{-4} \cdot 4^5 = 4^1 = 4$

b) $3^{-2} = \frac{1}{9}, \frac{1}{5^{-2}} = \frac{1}{25^{-1}} = 25, \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3, \left(\frac{2}{7}\right)^{-2} = \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4},$

$x^{1/7} = \sqrt[7]{x}, y^{3/2} = \sqrt{y^3} = \sqrt{y}^3, \quad a^{-1/4} = \frac{1}{\sqrt[4]{a}}, c^{-3/8} = \frac{1}{\sqrt[8]{c^3}}$

c) $\sqrt{2} = 2^{1/2}, \sqrt[6]{x^5} = x^{5/6}, \frac{1}{x^6} = x^{-6}, \quad \frac{3}{x^4} = 3x^{-4}, \sqrt{\frac{1}{5}} = 5^{-1/2}, \sqrt[7]{\frac{1}{x^2}} = x^{-2/7}, \quad \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}, \frac{4}{\sqrt[3]{x^8}} = 4 \cdot x^{-\frac{8}{3}}$

d) $-2^4 = -16, \ 2^3 \cdot 4^3 = 8 \cdot 64 = 492, \ (-3)^3 = -27, \ 2^{12} \cdot 2^{-10} = 2^2 = 4$

$4^{\frac{1}{2}} = 2, 10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001, \ 125^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{125}} = \frac{1}{5}, 16^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{16^5} = \sqrt[4]{16}^5 = 2^5 = 32$

e) $\sqrt{25} = 5, \ \sqrt{64} = 8, \quad \sqrt{1024} = 32, \sqrt{6561} = 81, \sqrt[3]{8} = 2, \quad \sqrt[6]{64} = 2, \ \sqrt[5]{243} = 3 \quad \sqrt[4]{6561} = 9$

$\sqrt{x^4} = x^2 \qquad \sqrt[3]{x^6} = |x^3| \qquad \sqrt{\frac{9}{x^2}} = \frac{3}{|x|}, \qquad \sqrt[3]{x^9} = x^3$

2.a) $2^4 = 16, \ a^{101}, \ x^{10}y, \ 5^0 = 1, \ 3^4 = 81, \ 4a^4b^{10} - b^7c^3$,

$x^{24}, k^8, \ (a^4b^{12})^{-\frac{1}{2}} = a^{-2}b^{-6}, \frac{27}{y^3}, \frac{x^{12}}{2^{12}x^6} = \frac{x^6}{4096}, \frac{z^9}{y}$

b) $-(-2)^3 \cdot (0{,}5)^3 = 1$, $((2^{-2})^3)^{-1} = 2^6 = 64$, $(4a^8)^{\frac{1}{2}} = 2a^4$, $\frac{8k^6}{4k} = 4k^5$, $\frac{1}{2y^2z^3} \cdot \frac{9y^2}{z^2} = \frac{9}{2z^5}$

c) $\frac{15^5 \cdot 20^4}{900^4} = \frac{(3\cdot5)^5(4\cdot5)^4}{((2\cdot3\cdot5)^2)^4} = \frac{3^5 5^5 4^4 5^4}{2^8 3^8 5^8} = \frac{5}{3^3} = \frac{5}{27}$, $3^4 \cdot 3^{-4} \cdot 2^{-4} \cdot 8^2 = \frac{64}{16} = 4$, $\frac{3^4 \cdot 5^4}{3^3 \cdot 5^2} = 3 \cdot 5^2 = 75$

d) $\frac{(4-2x)^5}{(2-x)^3} = \frac{(2\cdot(2-x))^5}{(2-x)^3} = \frac{2^5(2-x)^5}{(2-x)^3} = 2^5 \cdot (2-x)^2$, $\frac{(3ab^2c^3)^6}{27a(b^4c^{-2})^2} = \frac{3^6a^6b^{12}c^{18}}{27ab^8c^{-4}} = 27a^5b^4c^{22}$,

$\frac{9}{x^2-y^2} \cdot \left(\frac{3}{x+y}\right)^{-2} = \frac{9}{(x-y)(x+y)} \cdot \frac{(x+y)^2}{3^2} = \frac{x+y}{x-y}$

3.a) $\sqrt{36} = 6$, 4 , $(a^{12})^{\frac{1}{2}\frac{1}{3}} = a^2$, 2, $\sqrt{2}$, $4 \cdot \frac{|x|}{4\sqrt{2}} = \frac{|x|}{\sqrt{2}}$, $\frac{a^2}{2b^4}$, $\frac{z^2}{|z|} = |z|$, $2 \cdot \frac{5}{2} = 5$

b) $\sqrt{x^2 + 6x + 9} = \sqrt{(x+3)^2} = |x+3|, \ |x+6|$, $|3x-5|$

c) $\sqrt{4} \cdot \sqrt{(a+1)^2} = 2|a+1|, \sqrt{2} \cdot |x-2|, \sqrt{\left(t + \frac{1}{t}\right)^2} = \left|t + \frac{1}{t}\right|$, $\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a+b}} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{a-b}} = \sqrt{a-b} \cdot \frac{|x|}{\sqrt{a-b}} = |x|$,

$\sqrt{\frac{(x^2-1)}{(x+1)(x-1)^3}} = \sqrt{\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)^3}} = \frac{1}{|x-1|}$, $\frac{\sqrt[4]{x^8(x-5)^8}}{x^2-10x+25} = \frac{x^4(x-5)^4}{(x-5)^2} = x^4(x-5)^2$

5.a) $\log_2 64 = 6$; $\log_3 \frac{1}{3} = -1$; $\log_{10} 1000 = 3$; $\log_4(-16) =$ nicht definiert ; $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$; $\log_3 \frac{1}{27} = -3$

$\log_4 \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{4}$, $\log_3 \frac{1}{\sqrt[4]{27}} = -\frac{3}{4}$, $\ln e^3 = 3$, $\ln e^{2a} = 2a$, $\ln\left(\frac{1}{e^3}\right) = -3$, $\ln\left(\frac{1}{\sqrt[5]{e^2}}\right) = -\frac{2}{5}$

c) $\log_2 x + \log_2\left(\frac{1}{x^2}\right) = \log_2\left(\frac{x}{x^2}\right) = \log_2\left(\frac{1}{x}\right)$; $\frac{\log_3 x^2}{2} + \log_3 \frac{1}{x} = \frac{2\log_3 x}{2} + \log_3 \frac{1}{x} = \log_3 1 = 0$;

$ln(3e^2) - ln3 = ln\left(\frac{3e^2}{3}\right) = 2$; $4 \cdot (\log_{10} 4x + \log_{10} \frac{1}{2\sqrt{x}}) = 4\log_{10}\left(\frac{4x}{2\sqrt{x}}\right) = \log_{10}\left(2\sqrt{x}\right)^4 = \log_{10} 16x^2$

d) $e^{\ln 4} = 4$, $e^{3\ln 2} = e^{\wedge}(\ln 2^3) = 8$, $e^{-\ln 7} = e^{\ln 7^{-1}} = \frac{1}{7}$,

$e^{1+\ln 6} = e^1 \cdot e^{\ln 6} = 6e$, $\left(\sqrt{e}\right)^{4\ln 2} = e^{\frac{1}{2}\cdot 4\ln 2} = e^{2\ln 2} = 4$

Zur **Vertiefung** empfehlen wir die **Übungsaufgaben aus dem Skript**.

Moderater Schwierigkeitsgrad:
E1.12 – E1.16, H1.12, H1.13 a)-g), H1.15 - H1.17 , H1.18a)

Herausfordernder Schwierigkeitsgrad:
H1.13 h), H1.14, H1.18.